

כיצד מחשבים מומנט אינרציה של שטח

(Second moment of inertia)

1. מגדירים מערכת צירים נוחה עבור כל פרופיל החתך – במידה והצורה סימטרית אז כדאי להגדיר מערכת צירים שעוברת בצירי הסימטריה על מנת לחסוך בחישובים.

חישוב נקודת מרכז שטח

2. מפרידים את פרופיל החתך לצורות מוכרות (מלבן, משולש, מעגל, חצי מעגל).
3. ממספרים כל צורה שהפרדנו.
4. עבור כל צורה מחשבים:
 - שטח חתך $A_n [mm^2]$
 - קוארדינטת X של נקודת מרכז שטח, ביחס למערכת הצירים שבחרנו $x_{c_1} = [mm]$
 - קוארדינטת Y של נקודת מרכז שטח, ביחס למערכת הצירים שבחרנו $y_{c_1} = [mm]$
5. מבצעים את שלב 4 עבור כל צורה מוכרת שהפרדנו.
6. מחשבים נקודת מרכז שטח עבור כל הפרופיל כולו, בעזרת הנוסחה

$$X_c = \frac{A_1 x_{c_1} \pm A_2 x_{c_2} \pm A_3 x_{c_3} \pm \dots \pm A_n x_{c_n}}{A_1 \pm A_2 + A_3 \pm \dots \pm A_n}$$

$$Y_c = \frac{A_1 y_{c_1} \pm A_2 y_{c_2} \pm A_3 y_{c_3} \pm \dots \pm A_n y_{c_n}}{A_1 \pm A_2 + A_3 \pm \dots \pm A_n}$$

❖ הערה עבור הסימנים בנוסחה:

- עבור צורות מלאות שיוצרות שטח מלא אז הסימן בנוסחה הוא +
- עבור צורות ריקות שיוצרות חור אז הסימן הוא –

כאשר נדרשים למצוא מרכז שטח עבור שטח מתחת לפונקציה, משתמשים בנוסחה:

$$X_c = \frac{1}{A} \int_a^b (x \cdot f(x)) dx$$

$$Y_c = \frac{1}{A} \int_a^b \left(\frac{f(x)^2}{2} \right) dx$$

$$A = \int_a^b (f(x)) dx$$

חישוב מומנטי אנרציה

7. מחשבים מומנטי אנרציה עבור כל צורה בנפרד, ביחס לנקודת מרכז הכובד של הפרופיל (מצאנו בשלב הקודם).

חישוב מומנט אנרציה מתבצע על פי הנוסחא (משפט שטיינר):

$$I_{xx_n} = I_{x^*_n} + A_n(Y_c - y_{c_n})^2$$

מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר X

מומנט אנרציה של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית (בד"כ קיים בטבלה)
 $I_{x^*_n}$ [mm⁴]
 שטח הצורה A_n [mm²]
 Y_c קואורדינטת מרכז שטח של כל הצורה ביחס לצירים שהגדרנו
 Y_{c_n} קואורדינטת מרכז שטח של הצורה עבורה אנו מחשבים, ביחס לצירים שהגדרנו

$$I_{yy_n} = I_{y^*_n} + A_n(X_c - x_{c_n})^2$$

מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר Y

מומנט אנרציה של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית (בד"כ קיים בטבלה)
 $I_{y^*_n}$ [mm⁴]
 שטח הצורה A_n [mm²]
 X_c קואורדינטת מרכז שטח של כל הצורה, ביחס לצירים שהגדרנו
 X_{c_n} קואורדינטת מרכז שטח של הצורה עבורה אנו מחשבים ביחס לצירים שהגדרנו

$$I_{xy_n} = I_{xy^*_n} + A_n(X_c - x_{c_n})(Y_c - y_{c_n})$$

מכפלת אנרציה של שטח, סביב ציר xy

מכפלת אנרציה מרכזית של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית
 $I_{xy^*_n}$ [mm⁴]
 שטח הצורה A_n [mm²]

8. סכום מומנטי אנרציה

לאחר שחישבנו מומנטי אנרציה עבור כל צורה בנפרד, סוכמים את מומנטי האנרציה על מנת למצוא את מומנט האנרציה של הפרופיל סביב מערכת צירים שהגדרנו.

$$I_x = I_{xx_1} \pm I_{xx_2} \pm \dots \pm I_{xx_n}$$

$$I_y = I_{yy_1} \pm I_{yy_2} \pm \dots \pm I_{yy_n}$$

פרמטרים הנדסיים עבור פרופילים סטנדרטיים

מלבן

$$A = bh$$

$$x_c = \frac{b}{2}$$

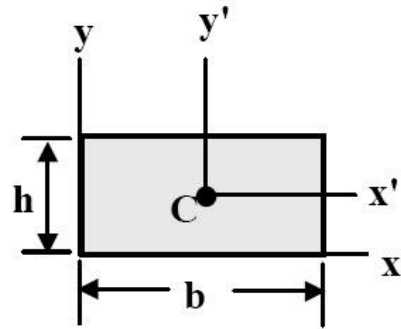
$$y_c = \frac{h}{2}$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$



משולש ישר זווית

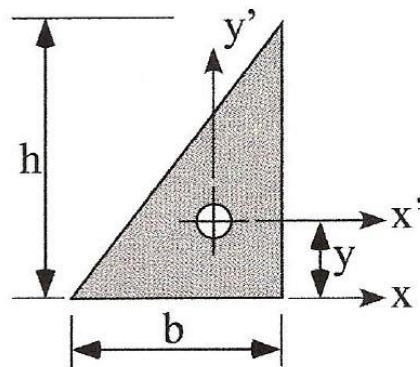
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_c = \frac{2}{3}b$$

$$y_c = \frac{1}{3}h$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{36}$$



$$x_c = \frac{1}{3}h$$

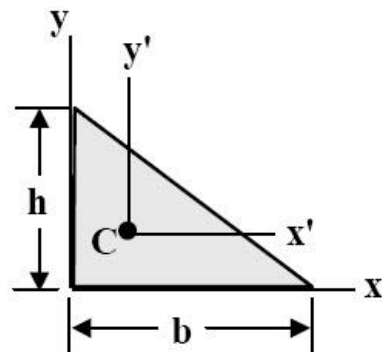
$$y_c = \frac{1}{3}h$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$



$$A = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$x_c = \frac{d}{2}$$

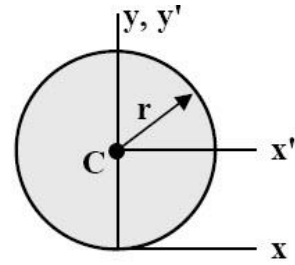
$$y_c = \frac{d}{2}$$

$$I_{x^*} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$I_x = \frac{5}{4} \pi r^4$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{4} r^4$$

עיגול



חצי עיגול

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8}$$

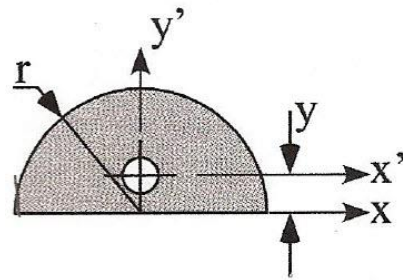
$$x_c = \frac{d}{2}$$

$$y_c = \frac{4}{3\pi} r$$

$$I_{x^*} = 0.10976 r^4$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi r^4}{8}$$



רבע עיגול

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi D^2}{16}$$

$$x_c = \frac{4}{3\pi} r$$

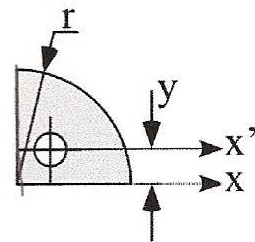
$$y_c = \frac{4}{3\pi} r$$

$$I_{x^*} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0.0549 r^4$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{16}$$

$$I_{y^*} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0.0549 r^4$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$



טבעת דקה - צינור

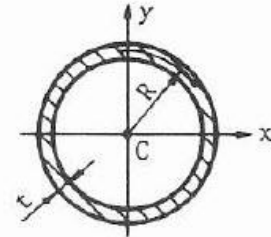
$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \frac{\pi}{4} D^2 - \frac{\pi}{4} d^2 = 2\pi r t$$

$$x_c = \frac{D}{2}$$

$$I_{x^*} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \pi t R^3$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \pi t R^3$$

7. טבעת דקה



טרפז שווה שוקיים

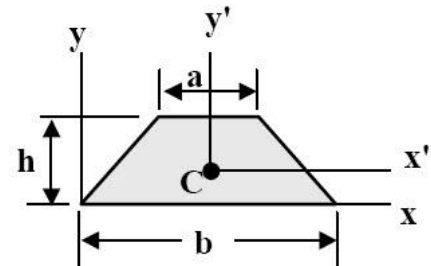
$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_{x^*} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$$

$$I_x = \frac{1}{12} h^3(3a+b)$$

$$I_{y^*} = \frac{h(a+b)(a^2 + b^2)}{48}$$



$$A = \frac{(a+b)}{2} h$$

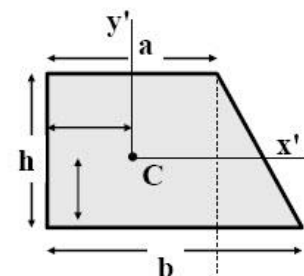
$$y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$x_c = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$$

$$I_{x^*} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+B)}$$

$$I_{y^*} = \frac{h(a^2 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)}{36(a+B)}$$

טרפז ישר זווית



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_c = \frac{b}{2}$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{48}$$

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_c = \frac{(b+c)}{3}$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

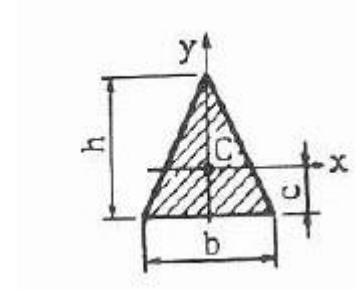
$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y^*} = \frac{bh(b^2 - bc + c^2)}{36}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{bh(b^2 + bc + c^2)}{12}$$

משולש שווה שוקיים



משולש כללי

