

מומנטי אנרציה ונוסחאות גיאומטריות עבור צורות מוכרות

המומנט הסטטי הראשון (First Moment of Area)

$$Q_x = \int_A y \cdot dA = \bar{y} \cdot A$$

$$Q_y = \int_A x \cdot dA = \bar{x} \cdot A$$

Q_x [m³] המומנט הסטטי הראשון

\bar{y} [m] המרחק בין מרכז השטח שעבורו מחשבים את המומנט הסטטי למרכז הפרופיל כולו

A [m²] שטח החתך

שימושים:

- חוזק חומרים 2 – מציאת מאמצי גזירה בקורות, מציאת שטף הגזירה בקורות.

המומנט הסטטי השני / מומנט אנרציה של שטח (Area Moment of Inertia)

שימושים:

- סטטיקה של גוף קשיח – חישוב מומנטי אנרציה של פרופילים
- חוזק חומרים 1 – חישוב מאמצי גזירה, מומנטי כפיפה בקורות, מאמצי כפיפה
- זרימה 1 – מציאת נקודת מרכז לחץ, מציאת נקודת מרכז הציפה (Metacenter) של גוף צף

$$I_{xx} = \int y^2 \cdot dA = \int_a^b \left(\frac{f(x)^3}{3} \right) dx$$

הגדרת מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר X

$$I_{yy} = \int x^2 \cdot dA = \int_a^b (x^2 \cdot f(x)) dx$$

הגדרת מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר Y

$$I_{zz} = \int xy \cdot da = \int_a^b \left(x \cdot \frac{f(x)^2}{2} \right) dx$$

הגדרת מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר Z

משפט שטיינר

$$I_{xx_n} = I_{x^*_n} + A_n(Y_c - y_{c_n})^2$$

מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר X

$I_{x^*_n}$ [mm⁴] מומנט אנרציה של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית (בד"כ קיים בטבלה)
 A_n [mm²] שטח הצורה
 Y_c [mm] קואורדינטת מרכז שטח של כל הצורה ביחס למערכת צירים שהגדרנו
 y_{c_n} [mm] קואורדינטת מרכז שטח של הצורה עבורה אנו מחשבים, ביחס למערכת צירים שהגדרנו

$$I_{yy_n} = I_{y^*_n} + A_n(X_c - x_{c_n})^2$$

מומנט אנרציה של שטח, סביב ציר Y

$I_{y^*_n}$ [mm⁴] מומנט אנרציה של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית (בד"כ קיים בטבלה)
 A_n [mm²] שטח הצורה
 X_c [mm] קואורדינטת מרכז שטח של כל הצורה, ביחס לצירים שהגדרנו
 x_{c_n} [mm] קואורדינטת מרכז שטח של הצורה עבורה אנו מחשבים ביחס לצירים שהגדרנו

$$I_{xy_n} = I_{xy^*_n} + A_n(X_c - x_{c_n})(Y_c - y_{c_n})$$

מכפלת אנרציה של שטח, סביב ציר xy

$I_{xy^*_n}$ [mm⁴] מכפלת אנרציה של שטח ביחס למערכת צירים מרכזית
 A_n [mm²] שטח הצורה

מערכת צירים מרכזית – מערכת צירים שראשיתה נמצאת בנקודת מרכז מסה G / מרכז שטח

מערכת צירים ראשית – מערכת צירים שנמצאת על אחד מצירי הסימטריה של הגוף, ומכפלות האינרציה שלה שוות אפס.

מערכת צירים מרכזית וראשית – מערכת צירים שראשיתה נמצאת בנקודת מרכז שטח/מסה וגם נמצאת על צירי הסימטריה של הגוף, ולכן מכפלות האינרציה שלה שוות אפס.

שטח, נק' מרכז מסה, מומנטי אנרציה, עבור צורות גיאומטריות מוכרות

מלבן

$$A = bh$$

$$x_c = \frac{b}{2}$$

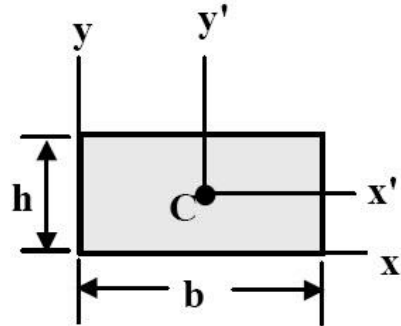
$$y_c = \frac{h}{2}$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{12}$$

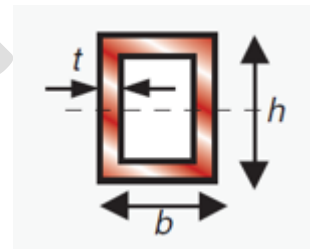
$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$



פרופיל ריבועי חלול

$$A = 2t(h + b)$$

$$I_{x^*} = \frac{1}{6}h^3t \left(1 + 3\frac{b}{h} \right)$$



משולש ישר זווית

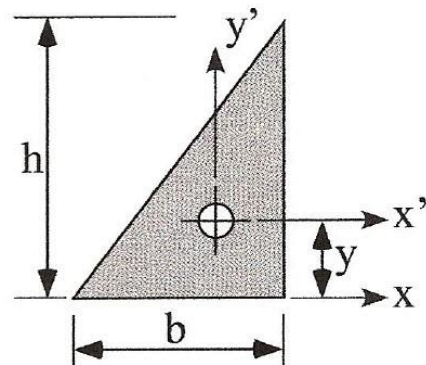
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_c = \frac{2}{3}b$$

$$y_c = \frac{1}{3}h$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{36}$$



$$x_c = \frac{1}{3}h$$

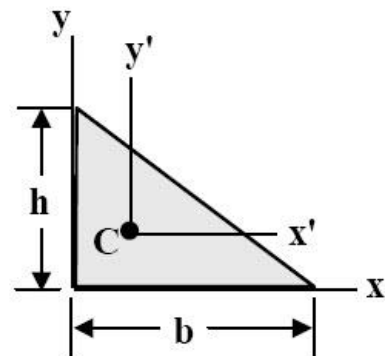
$$y_c = \frac{1}{3}h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

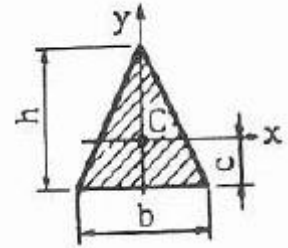
$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{36}$$



משולש שווה שוקיים



$$A = \frac{bh}{2}$$

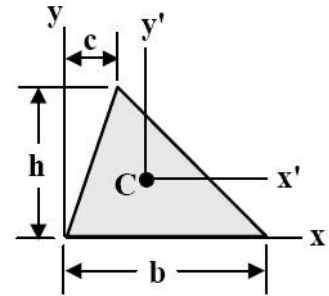
$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y^*} = \frac{hb^3}{48}$$

משולש כללי



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_c = \frac{(b+c)}{3}$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

$$I_{x^*} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y^*} = \frac{bh(b^2 - bc + c^2)}{36}$$

$$I_y = \frac{bh(b^2 + bc + c^2)}{12}$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$x_c = 0$$

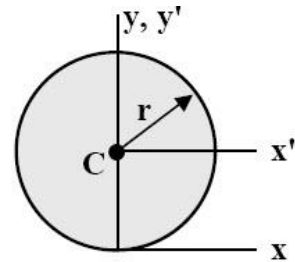
$$y_c = 0$$

$$I_{x^*} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$I_x = \frac{5}{4} \pi r^4$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{4} r^4$$

עיגול



חצי עיגול

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8}$$

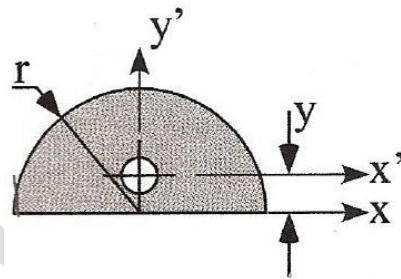
$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{4}{3\pi} r$$

$$I_{x^*} = 0.10976r^4$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi r^4}{8}$$



רבע מעגל

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi D^2}{16}$$

$$x_c = \frac{4}{3\pi} r$$

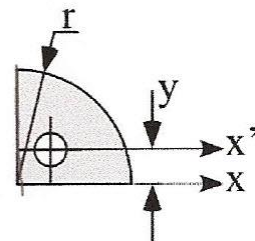
$$y_c = \frac{4}{3\pi} r$$

$$I_{x^*} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0.0549r^4$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{16}$$

$$I_{y^*} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0.0549r^4$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$



טבעת דקה - צינור

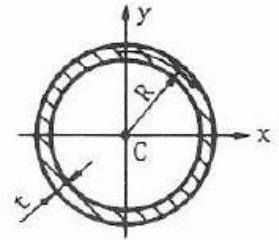
$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \frac{\pi}{4} D^2 - \frac{\pi}{4} d^2$$

$$x_c = 0$$

$$I_{x^*} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

$$I_{y^*} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

7. טבעת דקה



טרפז שווה שוקיים

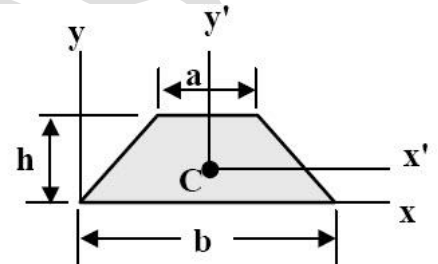
$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_{x^*} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$$

$$I_x = \frac{1}{12} h^3 (3a + b)$$

$$I_{y^*} = \frac{h(a+b)(a^2 + b^2)}{48}$$



טרפז ישר זווית

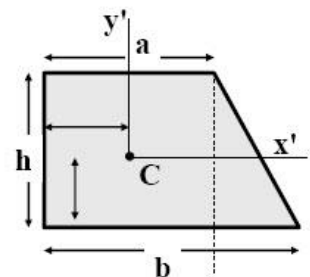
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

$$x_c = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$$

$$y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_{x^*} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+B)}$$

$$I_{y^*} = \frac{h(a^2 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)}{36(a+b)}$$



מומנט אנרציה פולרי (Polar Moment of inertia)

מושג שמתאר את התנגדות החתך לפיתול

שימושים

- חוזק חומרים 1, חוזק חומרים 2, חלקי מכונות – חישוב מאמצי פיתול בפרופילים עגולים

$$I_p = \frac{\pi}{32} D^4$$

מומנט אנרציה פולרי של פרופיל עגול (מלא)

קוטר חיצוני $D_{[mm]}$

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

מומנט אנרציה פולרי של צינור

קוטר חיצוני $D_{[mm]}$

קוטר פנימי $d_{[mm]}$

מומנט אנרציה של מסה (Mass Moment of inertia)

מושג שמתאר את מידת התנגדות הגוף לתאוצה זוויתית.

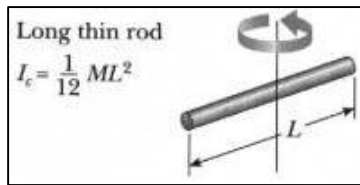
שימושים

- פיסיקה מכניקה – אנרגיה קינטית של גוף
- דינמיקה של גוף קשיח – משוואת סכום מומנטים של גוף קשיח, אנרגיה קינטית של גוף קשיח, תנע זוויתי של גוף קשיח

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

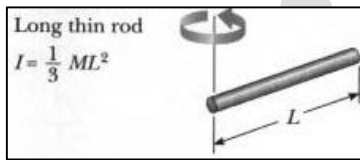
מומנט אנרציה מסי - הגדרה

$$I_G = \frac{1}{12} ml^2$$



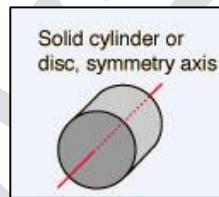
מומנט אנרציה מרכזי של מוט דק

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$



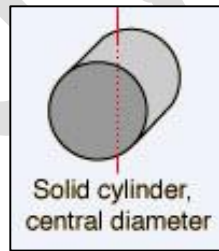
מומנט אנרציה של מוט דק

$$I_G = \frac{1}{2} mR^2$$



מומנט אנרציה מרכזי של גליל מלא

$$I = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2$$



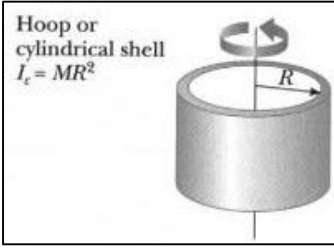
מומנט אנרציה של גליל מלא

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



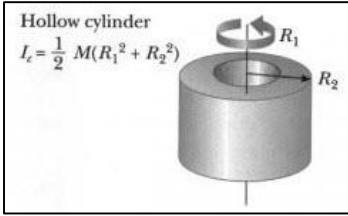
מומנט אנרציה של חישוק דק

$$I = mR^2$$



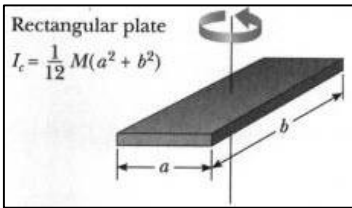
מומנט אנרציה של טבעת דקה (צינור)

$$I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + R_2^2)$$



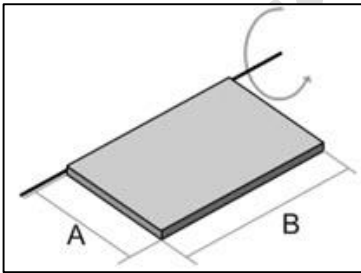
מומנט אנרציה של צינור

$$I_G = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



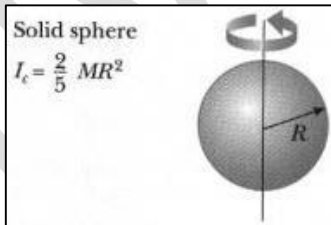
מומנט אנרציה מרכזי של פלטה מלבנית

$$I = \frac{1}{3}mA^2$$



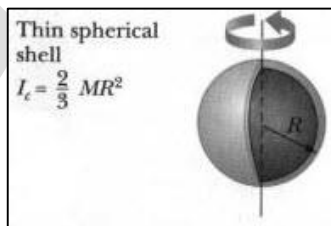
מומנט אנרציה של דלת

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$



מומנט אנרציה של ספירה (כדור מלא)

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$



מומנט אנרציה של קליפה כדורית (כדור דק חלול)

שטח (Area)

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

משולש (Triangle)

$$A = b \cdot h$$

מלבן (Rectangle)

$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

טרפז (Trapezoid)

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \cdot a^2$$

מחומש משוכלל

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

משושה משוכלל

$$A = 2(1+\sqrt{2}) \cdot a^2$$

מתומן משוכלל

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

עיגול

נפח (Volume)

$$V = \frac{b \cdot h}{2} \cdot H$$

$$V = b \cdot h \cdot H$$

$$V = a^3$$

$$V = \frac{(a+b)h}{2} \cdot H$$

$$V = \frac{1}{4} \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \cdot a^2 \cdot H$$

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot H$$

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (3R - h)$$

$$V = \frac{\pi R^2}{3} \cdot H$$

$$V = \frac{s}{3} \cdot H$$

משולש (Triangle)

מלבן (Rectangle)

קוביה (Cube)

טרפז (Trapezoid)

מחומש משוכלל (Regular Pentagon)

משושה משוכלל (Regular Hexagon)

מתומן משוכלל (Regular Octagon)

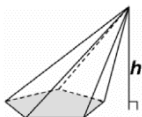
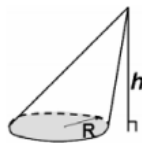
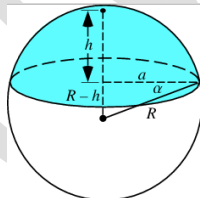
גליל (Cylinder)

כדור (Sphere)

כיפה כדורית (Spherical Cap)

חרוט (Cone)

פירמידה בעלת שטח בסיס S



שטח פנים (Surface Area)

$$2\pi r(L + r)$$



שטח פנים של גליל (צילינדר) כולל המכסים (עליון ותחתון)

$$2\pi rL = d\pi L$$

שטח פנים של גליל (צילינדר) ללא המכסים (עליון ותחתון)

$$6a^2$$



שטח פנים של קוביה בעלת מקצוע a

$$4\pi r^2 = \pi D^2$$



שטח פנים של כדור (מעטפת כדורית/קליפה כדורית)

$$s = R\theta_{[rad]}$$

אורך קשת מעגלית

Guyardos